MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1994
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES COMMUNE

Temps accordé : 4 heures

(3 pages)

PARTIE I

On considère les deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1-t^2)}}{1+t^2} dt .$$

I.1 Montrer que f et g sont de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et en préciser les dérivées f ' et g ' .

I.2 Montrer que f+g est une fonction constante qu'on déterminera.

I.3.a) Existence et calcul de la limite de g en $+\infty$

b) Donner la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

On se propose dans la suite de calculer de plusieurs façons les fonctions u et v qui seront définies à la partie II.

PARTIE II

Dans cette partie on considère les fonctions de la variable réelle x définies par

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(t\,x) dt \quad , \qquad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(t\,x) dt \quad .$$

$$z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}} dt \qquad \text{et pour } n \in \mathbf{N}^* \quad z_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}} dt .$$

II.4.a) Quels sont les ensembles de définition de u et de v ? Préciser la parité de u et v et les valeurs $u(0)$ et $v(0)$.

b) Justifier que z_n est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Etudier la convergence de la suite de fonctions $(z'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. La fonction z est-elle de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

c) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction z.

d) Montrer que $\forall x\in\mathbf{R}$, $\begin{cases} u(x) = 2(v'(x) - x u'(x)) \\ v(x) = -2(u'(x) + x v'(x)) \end{cases}$

II.5.a) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question II.4.c).

On rappelle que pour $x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{x+i}$ s'écrit $\dfrac{x-i}{x^2+1}$

b) En déduire les expressions de u et v pour x positif.

II.6 Montrer que u et v sont solutions d'une équation différentielle (E) : $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$. A, B, C étant des fonctions polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2 et à coefficients entiers qu'on déterminera.

II.7 On suppose que φ est une solution de (E) développable en série entière de rayon de convergence R non nul et on note :

$$\forall x\in]-R, R[,\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Donner une relation de récurrence reliant, pour $n\in\mathbf{N}$, a_{n+2} et a_n. Préciser R. On montrera que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension 2.

II.8 Peut-on déduire des questions 6 et 7 exclusivement que u et v sont développables en série entière ? (On ne calculera pas explicitement ces développements).

PARTIE III

u et v désignent toujours les fonctions définies à la partie II.

On pose $r(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$ et $\theta(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)$ dans la mesure où $\theta(x)$ existe.

III.9 Pour λ réel strictement positif, on définit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\alpha_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt .$$

a) Etudier cette suite (définition, signe de α_n, sens de variation,convergence, limite éventuelle...).

b) En déduire le signe de $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ puis celui de $v(x)$ pour x réel strictement positif.

III.10.a) Montrer que r^2 et θ vérifient des équations différentielles du premier ordre . En déduire $r(x)$ et $\theta(x)$ pour x réel strictement positif.

b) Retrouver, pour x réel quelconque, les expressions de $u(x)$ et $v(x)$.

PARTIE IV

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. à coefficients réels et I_n la matrice unité d'ordre n.
On note aussi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de n lignes et une colonne à coefficients réels.
On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ a une structure d'algèbre sur $\mathbf{R}$, de dimension finie.
On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni d'une norme $\| \ . \ \|$ telle que : $\forall (A.\ B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))^2 \quad \|A.B\| \leq \|A\| \ \|B\|$
On admet qu'il existe une telle norme.

IV.11 Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{A^k}{k!}$. $k \geq 0$. où A est un élément donné de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
On pose $A^0 = I_n$. On notera exp(A) ou e^A la somme de cette série.

IV.12 On admet que si A.B = B.A alors $e^{A-B} = e^{B-A}$. (A et B désignant deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).
Montrer que exp(A) est inversible et donner son inverse.

IV.13 Soit M une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. vérifiant :
$\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2 \quad M(x).M(y)=M(y).M(x)$.

On pose $W(x) = \int_0^x M(t)dt$ et $N(x) = \exp(W(x))$.
On admet que N est dérivable et que $\forall x\in\mathbf{R}$, $N'(x) = M(x).N(x)$.
On considère le "système différentiel " : (I) : $X'(x) = M(x).X(x)$.
où X est une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Montrer que si Y est une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $X(x) = N(x).Y(x)$.
alors X est une solution de (I) si et seulement si Y est une application constante.

IV.14 On suppose dorénavant n = 2 et on pose $X(x)=\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$.
(u et v étant définies dans la partie II).
Montrer que :

a) Il existe $M(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $X'(x) = M(x).X(x)$.

b) $\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2 \quad M(x).M(y) = M(y).M(x)$.

c) Si on pose $A=\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. alors $e^A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

IV.15 Déduire des questions IV.13 et IV.14 les expressions de u et v en fonction de x. Retrouve-t-on les résultats de III.10 et II.5 ?

FIN